partie B :

1) $g(x)=f^{-1}(\sin x)+f^{-1}(\cos x)$

a) la fonction : $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

et $\sin\left(\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=]0,1[$

comme f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$ alors:

la fonction : $x \mapsto f^{-1}(\sin x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

• de meme la fonction : $x \mapsto f^{-1}(\cos x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

par suite g est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$g'(x)=\cos x.(f^{-1})'(\cos x)-\sin x.(f^{-1})'(\cos x)$

$=\frac{2\cos x}{\pi.\sqrt{1-\sin^2 x}}-\frac{2\sin x}{\pi\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=0$

b) $g'(x)=0 \quad ; \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

d'où g est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

d'où $g(x)=1 \quad ; \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow f^{-1}(\sin x)+f^{-1}(\cos x)=1$

2) $h(x)=2x.\sqrt{1-x^2} \quad ; x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

a) $h'(x)=2\sqrt{1-x^2}+2x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$

$=\frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

x	0	½
h '(x)	+	
h(x)	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) h est continue et strictement croissante sur $[0,½]$

$\Rightarrow h([0,½])=[h(0),h(½)]=[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$

3) $k(x)=f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

$k(x)=f^{-1}\circ h(x)$

h est dérivable sur $[0,½]$ et $h([0,½])=[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$

comme f^{-1} est dérivable sur $\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

alors $k=f^{-1}\circ h$ est dérivable sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

$k'(x)=h'(x).(f^{-1})'(h(x))=\frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}}.\frac{2}{\pi\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}}$

$=\frac{2(2-4x^2)}{\pi.\sqrt{1-x^2}.\sqrt{(1-2x^2)^2}}=\frac{4.(1-2x^2)}{\pi(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{4}{\pi.\sqrt{1-x^2}}$

$k'(x)=2(f^{-1})'(x)$

$k(x)=2f^{-1}(x)+c \quad ; \forall x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$

$k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2.f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+c \Rightarrow 1=1+c \Rightarrow c=0$

d'où $f^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})=2.f^{-1}(x)$

EX 27 :

partie A :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) pour x>0

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+x^2-1}{x(1+\sqrt{1+x^2})}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}=0=f(0)$

$\Rightarrow f$ est continue à droite en 0

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn